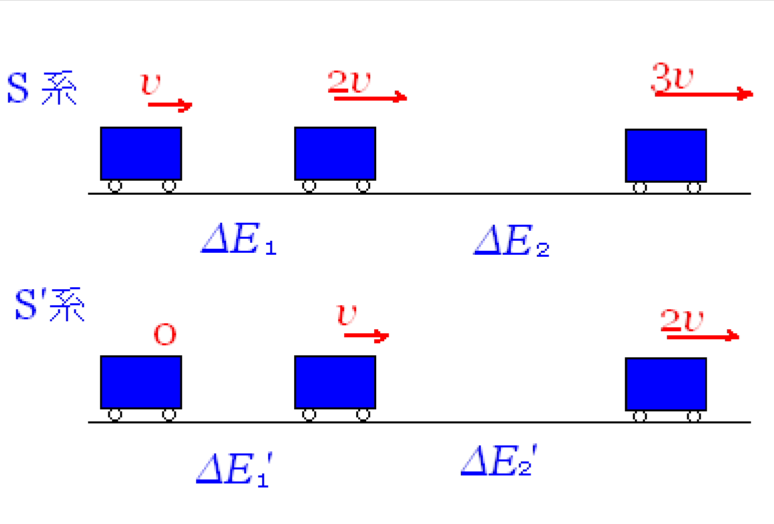
運動エネルギーの相対性

[OKWave](#)のQ&Aより。運動エネルギーの相対性とエネルギー保存の絶対性について。

長いので引用は避けるが，要点は次の通りである。



一定の加速度で加速する車を観測する。静止系 Sでは，時刻 0に速度 vだった車が，時刻 tに速度 $2v$，そして時刻 $2t$に速度 $3v$になったとする。すると時間 $0\sim t$に得たエネルギー ΔE_1に対する，時間 $t\sim 2t$に得たエネルギー ΔE_2の比は，

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta E_1}=\frac{(3v)^2-(2v)^2}{(2v)^2-v^2}=\frac{5}{3}$$

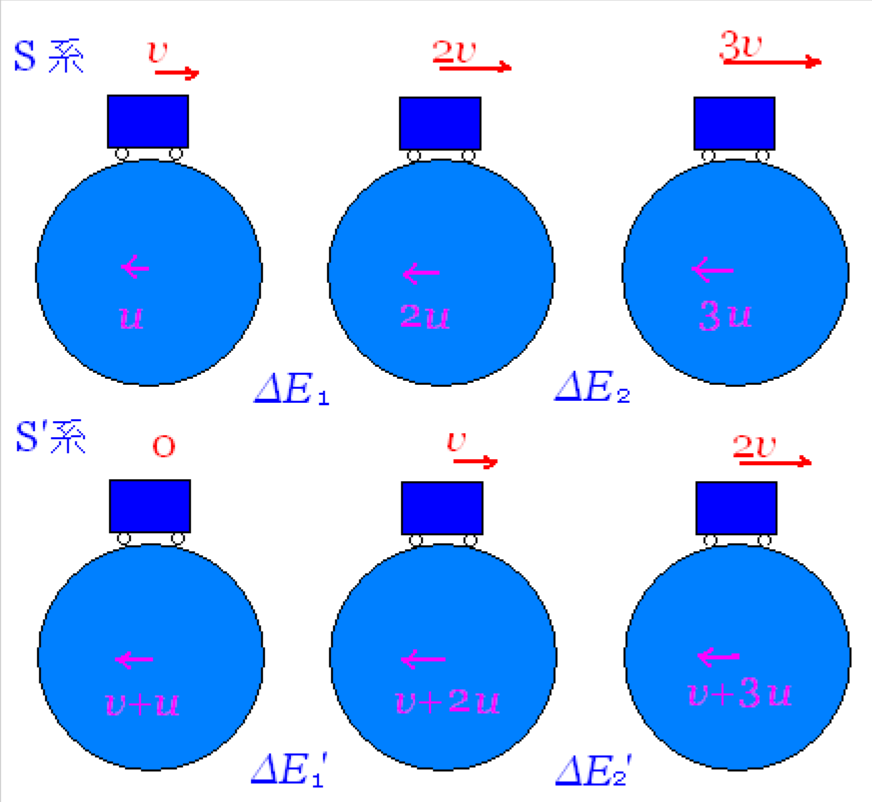
となる。後半の方がエンジンの仕事率は1.67倍に増えなければならない。

これを Sに対して vの速度をもつ慣性系 S'で観測すると，

$$\frac{\Delta E_2'}{\Delta E_1'}=\frac{(2v)^2-v^2}{v^2-0^2}=3$$

となり，後半のエンジンの仕事率は3倍になってしまう。この矛盾をどう考えたらいいだろうか？　・・・というわけだ。

運動エネルギーは，座標系によって変換されるからもとより相対的である。しかし，エネルギー保存は絶対的でなければならないだろう。さて，議論のどこがおかしいか？



エンジンがする仕事は，車の推進において力を及ぼしあう「系」に対してであることを見逃してはならない。つまり，上の議論には地球が抜けている。以下，自転・公転といったもともとの地球の運動は無視し，初め車も地球も静止しているとする。また，車の質量 m，地球の質量 Mとする。

たとえば，S系において車が速度 vから $2v$に加速すると，運動量保存により地球は後方へ速度 $u = m/M \cdot v$から $2u$に加速することになる。このとき，

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta E_1} = \frac{\frac{5}{2}mv^2 + \frac{5}{2}Mu^2}{\frac{3}{2}mv^2 + \frac{3}{2}Mu^2} = \frac{5}{3}$$

一方，S'系から見ると，

$$\frac{\Delta E_2{}'}{\Delta E_1{}'} = \frac{\frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\{(v+3u)^2 - (v+2u)^2\}}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\{(v+2u)^2 - (v+u)^2\}} = \frac{\frac{5}{2}mv^2 - \frac{5}{2}Mu^2}{\frac{3}{2}mv^2 - \frac{3}{2}Mu^2} = \frac{5}{3}$$

となり，矛盾のないことが示される。

もう少し簡明にするために微分を使えば，運動量保存により，車の速度変化 dvに対して地球の速度変化は $du = m/M \cdot dv$であり，このときエネルギー変化は

$$dE = d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2\right) = mvdv + Mudu = m(v+u)dv$$

これを S系に対して速度 v_0をもつ S'系から見れば，

$$dE' = d\left(\frac{1}{2}m(v - v_0)^2 + \frac{1}{2}M(u + v_0)^2\right) = m(v - v_0)dv + M(u + v_0)du = m(v+u)dv$$

となる。座標系を移ったときに，mv_0dv のエネルギーが車から地球に移行したと見ることができる。まさに運動エネルギーは相対的だが，エネルギー保存は絶対的である。
