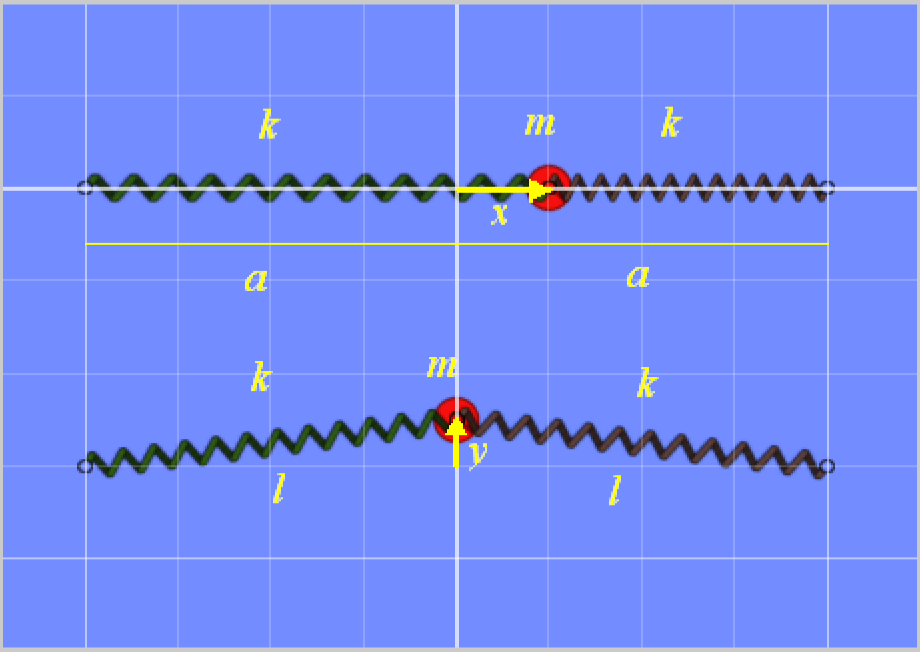
スリンキー近似

2本のばねに引かれた質点の縦振動と横振動における，スリンキー近似（自然長$\ll$平衡長）と小振動近似（変位$\ll$平衡長）の比較。



自然長a_0から平衡長aに伸びた，ばね定数kの2本のばねに左右に引かれ，なめらかな平面上で運動する質量mの質点の縦振動および横振動について考察する。

縦振動の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -k(a - a_0 + x) + k(a - a_0 - x)$$

すなわち，

$$m\ddot{x} = -2kx$$

したがって角振動数と周期は，

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad , \quad T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

となる。また，横振動の運動方程式は，

$$m\ddot{y} = -2k(l - a_0) \times \frac{y}{l}$$

すなわち，

$$m\ddot{y} = -2k\left(1 - \frac{a_0}{l}\right)y$$

となるが，lはyの関数であるから調和振動にはならない。そこで，横振動が調和振動となる２つの近似について考察しよう。

(1) スリンキー近似

自然長が平衡長に対して無視できるほど小さいとする近似である。スリンキーは，階段を下りるゆるいばねのおもちゃ。

$a_0 \ll a < l$だから，運動方程式は

$m\ddot{y} = -2ky$

となり，変位の大小に関わらず，角振動数および周期は縦振動に等しくなる。

$$\omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad , \quad T_y = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

(2) 小振動近似

変位が平衡長に対して十分小さいときに可能な近似である。

$y \ll a$だから，

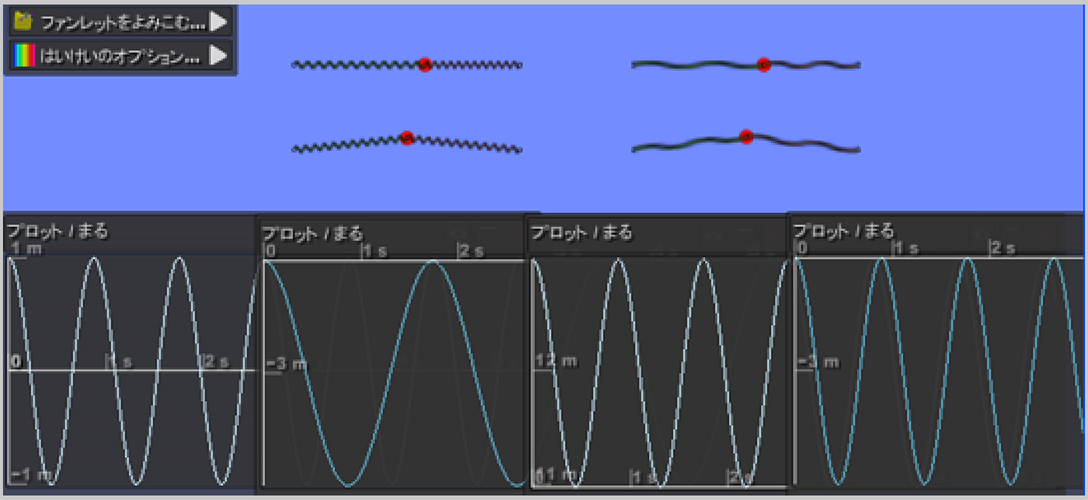
$$1 - \frac{a_0}{l} = 1 - \frac{a_0}{\sqrt{a^2 + y^2}} \simeq 1 - \frac{a_0}{a}$$

と近似でき，運動方程式は

$$m\ddot{y} = -2k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)y$$

となる。したがって振動は縦振動に比べてゆっくりとなる。

$$\omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)} \quad , \quad T_y = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{2k(a - a_0)}}$$



[Algodooシーンのダウンロード]
