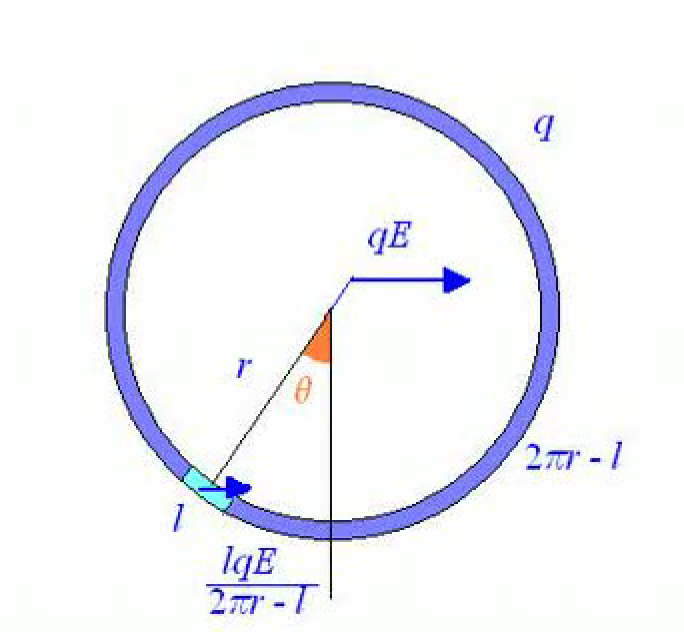
【解答】切れ目のあるリング電荷の回転

【問題】⇒ 切れ目のあるリング電荷の回転



図のような角度 θのとき，lの間隙に他と同じ密度で電荷があるとすると，対称性から全体が受けるトルクはゼロになる。すなわち，間隙がある場合のリングが受けるトルクは，lに仮想した電荷が受けるトルクに等しく逆向きで，

$$\tau(\theta)=\frac{l}{2\pi r-l}qEr\cos\theta\simeq\frac{qEl\cos\theta}{2\pi}$$

となる。ただし，rはリングの半径である。

リングの慣性モーメント $I\simeq Mr^2$を用いて，リングの回転の運動方程式は

$$I\ddot{\theta}=\tau(\theta)\quad\text{i.e.}\quad\ddot{\theta}=\frac{qEl\cos\theta}{2\pi Mr^2}$$

これをエネルギー積分すると，$\theta(0)=0\ ,\ \dot{\theta}(0)=0$より，

$$\dot{\theta}^2=\frac{qEl\sin\theta}{\pi Mr^2}$$

$$\therefore v=r\dot{\theta}=\sqrt{\frac{qEl\sin\theta}{\pi M}}$$

したがって，最大速さは $\theta=\pi/2$のときで，

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{qEl}{\pi M}}$$

となる。

つりあい位置は，$\theta=\pi/2$だから，あらためて $\phi=\theta-\pi/2$にとって微小角の近似をとれば，

$$\ddot{\phi}=-\frac{qEl}{2\pi Mr^2}\cdot\phi$$

したがって，周期は

$$T = r\sqrt{\frac{8\pi^3 M}{qEl}}$$

となる。