【解答】小球を発射する台車

【問題】⟹ 小球を発射する台車

(1)

求める小球と台車の速度を v，Vとすると，運動量保存により

$0 = mv + MV$

エネルギー保存により，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

両式を連立方程式として解いて，

$$v = v_0\sqrt{\frac{M}{M+m}} \quad , \quad |V| = \frac{mv_0}{\sqrt{M(M+m)}}$$

を得る。

(2)

小球と台車の速度の水平成分を v_x，V_xとする。水平方向の運動量保存により

$0 = mv_x + MV_x$

エネルギー保存により，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2) + \frac{1}{2}M{V_x}^2$$

両式を連立方程式として解くと，

$$v_x = \sqrt{\frac{M({v_0}^2 - {v_y}^2)}{M+m}} \quad , \quad V_x = -\sqrt{\frac{m^2({v_0}^2 - {v_y}^2)}{M(M+m)}}$$

求める飛距離を l，飛行時間を tとすると，

$$l = v_x t \quad , \quad v_y - g\frac{t}{2} = 0$$

$$\therefore l = \frac{2v_y}{g}\sqrt{\frac{M({v_0}^2 - {v_y}^2)}{M+m}}$$

(3)

l^2の v_yを含む因子を取り出すと，

$${v_y}^2({v_0}^2 - {v_y}^2) = -\left({v_y}^2 - \frac{{v_0}^2}{2}\right)^2 + \frac{{v_0}^4}{4}$$

したがって，lが最大となるのは $v_y = v_0/\sqrt{2}$のときで，最大値は

$$l_{\max} = \frac{{v_0}^2}{g}\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

となる。また，このときの小球と台車の速さは，

$$\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = v_0\sqrt{\frac{2M+m}{2(M+m)}} \quad , \quad |V_x| = \frac{mv_0}{\sqrt{2M(M+m)}}$$

さらに，

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x - V_x} = \sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

となる。